
Translation of *Finding out Area by using Symmetry : Preeti Dhasmana*

From_Azim Premji University At Right Angles_November,2021

कक्षा से

समममिति का उपयोग करके क्षेत्रफल का पता लगाना

प्रीति धस्माना

"बाह(Bach's) की रचनाओं, रुबिक के घन, जिस तरीक़े से हम अपने साथी चुनते हैं और उप-परमाण्विक कणों की भौतिकी में क्या समानता है? यह सभी वैज्ञानिक और कलात्मक सिद्धान्तों को सुन्दर ढंग से एकरूप कर देने वाले सममिति के नियमों द्वारा शासित होते हैं। " - मारियो लिवियो

मुख्य शब्द : *सममिति, रूपान्तर, परावर्तन, घूर्णन, निहितार्थ, क्षेत्रफल, शिक्षण-शास्त्र*

परिचय

एक बच्चे के शुरुआती चित्रों में हम अक्सर फूलों, तितलियों, पत्तियों और इसी तरह की चीज़ों को देखते हैं। क्या आपने इस बात पर ध्यान दिया है कि उन्होंने प्रकृति में हर जगह व्याप्त सममिति को सहज रूप से दोहराया है?

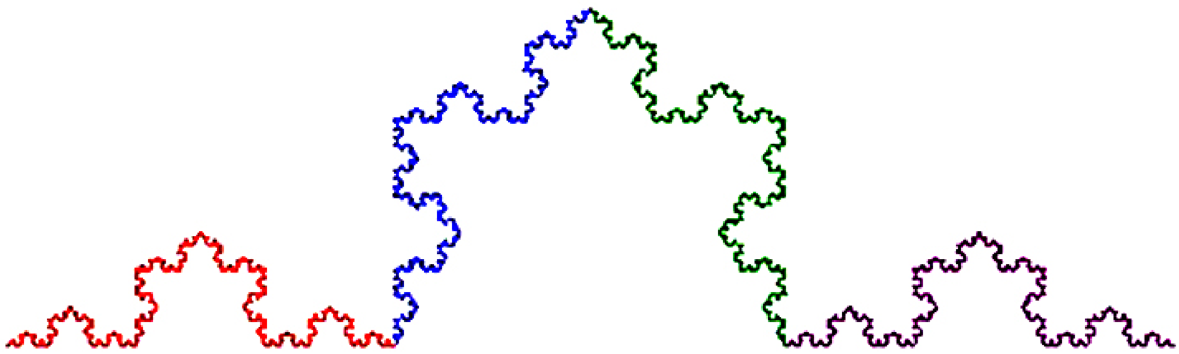
आइए, पहले सममिति की मूल बातें समझें। सममिति क्या है? एक छोटा बच्चा इसे कैसे समझता है? मरियम वेबस्टर शब्दकोश के अनुसार, 'सममिति एक विभाजन रेखा या मध्य तल या एक केन्द्र या अक्ष की विपरीत दिशा में आकार, आकृति और भागों की सापेक्ष स्थिति में समानता का गुणधर्म है।'

गणितीय रूप से हम कहते हैं कि एक वस्तु सममित है, यदि रूपान्तर करने के बाद भी उसमें परिवर्तन न हो। विशेष रूप से, इसका मतलब है कि वस्तु का रूपान्तर करने के बाद भी वह बिल्कुल अपने मूल संस्करण के समान ही दिखती है।

सममिति के प्रकार

1. **परावर्तन सममिति (Reflective symmetry)** : किसी द्विविमीय वस्तु में परावर्तन सममिति होती है, यदि उसके बीच से जाने वाली एक रेखा उसे ऐसे दो टुकड़ों में विभाजित करती हो जो एक-दूसरे के दर्पण प्रतिबिम्ब (mirror images) हों।

2. **घूर्णन सममिति (Rotational symmetry)** : किसी द्विविमीय वस्तु में घूर्णन सममिति होती है यदि वस्तु को एक निश्चित बिन्दु पर, एक निश्चित कोण पर घुमाया जा सकता है और इसके परिणामस्वरूप उसमें कोई स्पष्ट परिवर्तन नहीं होता है।



ज़ूम करने पर लाल भाग (या नीला, या हरा, या बैंगनी भाग) पूरी आकृति के समान है

3. **स्थानान्तरण सममिति (Translational symmetry)** : जब किसी द्विविमीय या त्रिविमीय वस्तु को स्थानान्तरित (वस्तु के हर बिन्दु को एक ही दिशा में और समान दूरी पर ले जाना) किया जा सकता है और इसके परिणामस्वरूप उसमें कोई स्पष्ट परिवर्तन नहीं होता है।
4. अन्य सममितियों में ग्लाइड परावर्तन सममिति (स्थानान्तरण के बाद परावर्तन) और रेट्रोफ्लेक्शन सममिति (घूर्णन और परावर्तन सममिति का संयोजन– - एक विशेष प्रकार की कुण्डलीनुमा सममिति हो सकती है) और स्केल सममिति (जहाँ विस्तार करने या सिकुड़ने से वस्तु नहीं बदलती है। उदाहरण के लिए, फ्रेक्टल के मामले में।)

पाठ्यपुस्तकों में सममितियों की अवधारणा

प्राथमिक स्तर की पाठ्यपुस्तकों में विभिन्न गतिविधियों और वर्कशीट के रूप में केवल पहले तीन प्रकार की सममितियाँ शामिल हैं। कक्षा 2 की एनसीईआरटी की गणित की पाठ्यपुस्तक में पैटर्न और सममिति (अशाब्दिक तर्कशक्ति - non-verbal reasoning) की दृश्य-पहचान पर वर्कशीट हैं। हालाँकि पैटर्न, और कुछ नहीं, बल्कि किसी सतह पर आकृतियों का रूपान्तरण या गति है जिसे स्थानान्तरण (सरकने), परावर्तन (पलटने) और घूर्णन (मोड़ने) के रूप में वर्गीकृत किया जाता है, फिर भी क्या हम कह सकते हैं कि इस पाठ्यपुस्तक में सममिति से परिचय करवाया गया है?

कक्षा 3 की एनसीईआरटी की गणित की पाठ्यपुस्तक में पहले अध्याय में 'जैसे को तैसा' नामक कहानी के माध्यम से सममिति की अवधारणाओं पर चर्चा की गई है। और इसके बाद आकृतियों व अक्षरों का उपयोग करके सममित रेखा (या बिन्दीदार रेखा) से परिचय कराने के साथ-साथ दर्पण से आधे हिस्सों को पूरा करने जैसी गतिविधियाँ दी गई हैं। इसी तरह, अध्याय

10 में दी गई पैटर्न की गतिविधियाँ अप्रत्यक्ष रूप से सममिति की अन्तर्निहित अवधारणा का उपयोग करती हैं।

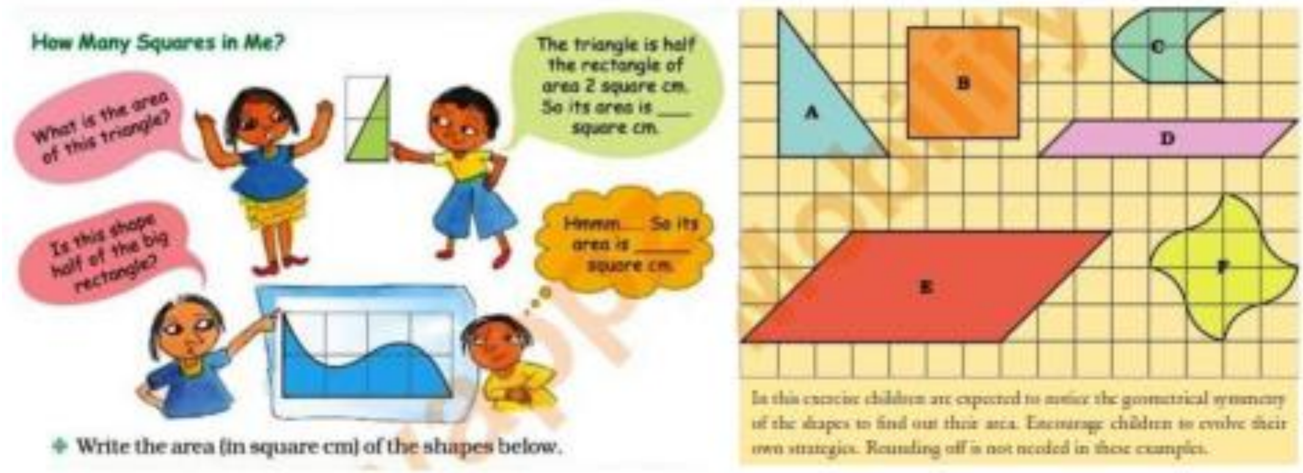
सममिति का उपयोग कक्षा 4 में किया जाता है– विशेषकर अध्याय 9 में बाक़ी के आधे हिस्से को पूरा करने की गतिविधि के रूप में और अप्रत्यक्ष रूप से अध्याय 10 में फ़र्श डिज़ाइन और टाइलिंग पैटर्न पर गतिविधि के रूप में।

कक्षा 5 के अध्याय 5 में अधिक जटिल आकृतियों और जटिल दर्पण खेल गतिविधियों के लिए सममित रेखा पर चर्चा की गई है। यह गतिविधियाँ रैखिक सममिति (line symmetry) के साथ-साथ घूर्णन सममिति (आधे, एक तिहाई, एक चौथाई या एक बटे छह का उपयोग करके वस्तुओं को घुमाना) के विचार को पुख़्ता करती हैं। अध्याय 7 'घुमाव और पैटर्न' की गतिविधियों के साथ घूर्णन सममिति और पैटर्न को सीधे जोड़ता है।

अब सवाल यह उठता है कि प्राथमिक स्तर पर हमें सममिति का परिचय क्यों, कैसे और किस हद तक देना चाहिए? इस क्यों के कुछ जवाब इस प्रकार हैं :

- अपने आस-पास की वस्तुओं में ज्यामितीय पैटर्न की पहचान करने की क्षमता विकसित करने के लिए
- समस्या निवारण कौशल विकसित करने के लिए
- बच्चों की तर्कशक्ति विकसित करने के लिए
- बच्चों में कल्पना, रचनात्मकता और सौन्दर्यशास्त्र की भावना विकसित करने के लिए।

कैसे और किस हद तक : प्राथमिक पाठ्यपुस्तकों में एक अप्रत्यक्ष दृष्टिकोण का उपयोग किया जाता है। सममिति की अवधारणा का उपयोग विभिन्न पैटर्न गतिविधियों जैसे कि रंगोली, ईंटों को जमाना, बुनाई के पैटर्न, दर्पण की मदद से अधूरे चित्रों को पूरा करना, काग़ज़ मोड़ना और संख्या पैटर्न में किया जाता है। इस स्तर पर, हमें चाहिए कि बच्चे प्रकृति में अपने चारों ओर सममिति को खोजें व देखें। यह इस दृष्टिकोण के अनुरूप है कि गणित एक तरह से संख्याओं और आकृतियों के साथ खेलना है, एक-दूसरे के साथ उनके सम्बन्ध को और खेल के नियम को जानना है। इस उद्देश्य के लिए उपयोग की जाने वाली गतिविधियों का वर्णन इस लेख में किया गया है।



चित्र-1

जिनके साथ गतिविधि की गई

इन गतिविधियों को एकेश्वर विकासखण्ड के जीपीएस दांडा मल्ला के कक्षा 5 के चार विद्यार्थियों के साथ किया गया था। यह बच्चे वंचित पृष्ठभूमि से आते थे और इन्हें घर पर कोई अकादमिक सहयोग नहीं मिलता था। नई चीज़ों को सीखने के लिए उनमें सामान्य जिज्ञासा थी।

समस्या की पहचान

कक्षा 5 की पाठ्यपुस्तक के अध्याय 4 और अध्याय 9 को पढ़ाने के दौरान हम एक पृष्ठ (चित्र-1) पर आए जहाँ शिक्षकों को सममिति का उपयोग करके ग्रिड पेपर पर दी गई विभिन्न आकृतियों का क्षेत्रफल निकालने के लिए निर्देश दिया गया है।

शिक्षक क्या करना चाहता था और क्यों

हमने महसूस किया कि हालाँकि कक्षा 3, 4 और 5 की पाठ्यपुस्तकों में विभिन्न गतिविधियों के माध्यम से बच्चों का 'सममिति' से परिचय कराया गया था, लेकिन वे क्षेत्रफल से सम्बन्धित इन समस्याओं के लिए इसका उपयोग नहीं कर सके। इसलिए मैंने क्षेत्रफल की अवधारणा के साथ सममिति की अवधारणा को जोड़ने में उनकी मदद करने की कोशिश की, विशेष रूप से दी गई समस्या के सन्दर्भ में।

कार्ययोजना

मैंने निम्नलिखित उद्देश्यों के लिए वर्कशीट की एक सीरिज़ तैयार की :

1. बच्चों के पूर्व ज्ञान की पहचान करने के लिए पूर्व-परीक्षण करना
2. विभिन्न प्रकार की सममितियों जैसे घूर्णन सममिति, स्थानान्तरण सममिति, दर्पण प्रतिबिम्ब, सममित रेखा और सममित वक्र[1] को समझना

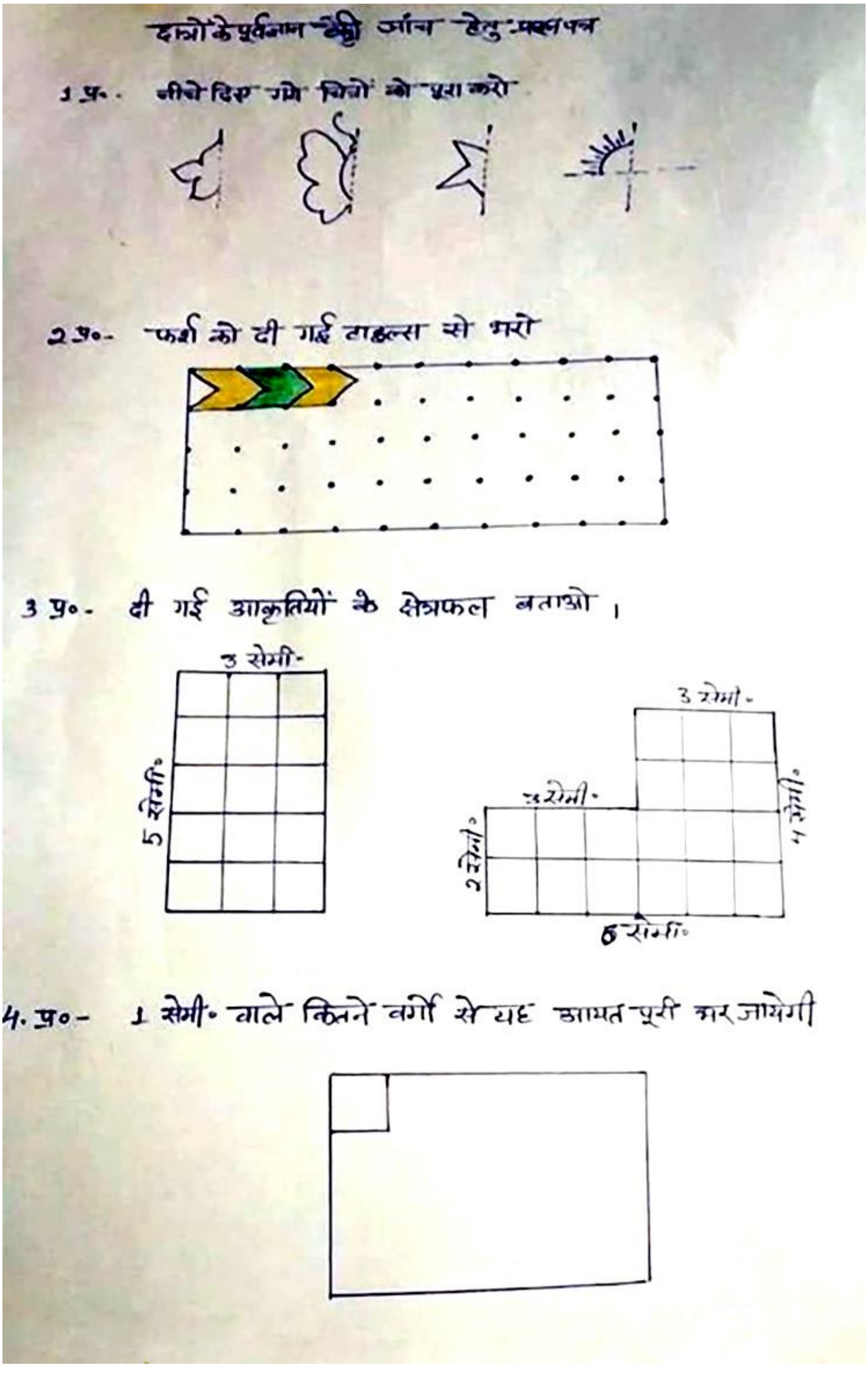
[1] वक्र रेखा जो किसी आकृति को सर्वांगसम भागों में बाँटती है (गतिविधि 3 देखें)

3. सममिति का उपयोग करके ग्रिड पेपर पर विभिन्न आकृतियों के क्षेत्रफलों का पता लगाना।
4. इन अवधारणाओं के बारे में बच्चों की समझ का मूल्यांकन करना।

दिन 1 : बच्चों का पूर्व ज्ञान

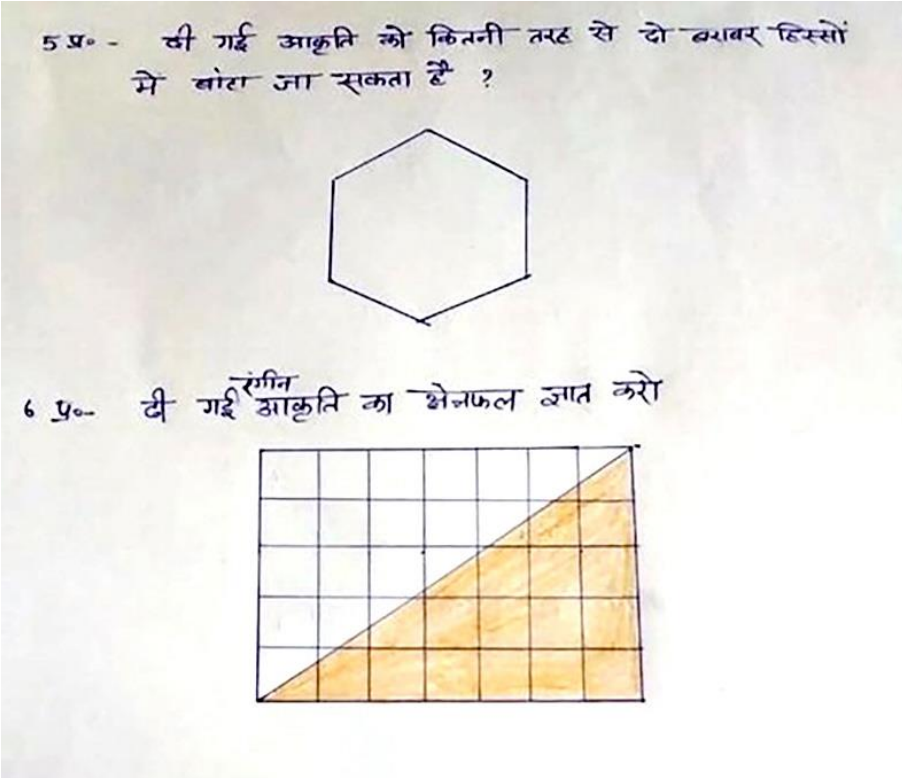
परिणाम : मैं इस निष्कर्ष पर पहुँची कि

1. बच्चों को पैटर्न को पहचानने, प्रतिबिम्ब और बाक़ी के आधे हिस्से को पूरा करने के रूप में सममिति की अस्पष्ट समझ थी।
2. वे इकाई वर्गों की गिनती करके एक सामान्य वर्ग और आयत के क्षेत्रफल का पता लगाने में सक्षम थे।
3. उन्हें सममित रेखा का कोई ज्ञान नहीं था।
4. वे क्षेत्रफल की अवधारणा को सममिति से नहीं जोड़ पा रहे थे।



छात्रों के पूर्वज्ञान की जाँच हेतु प्रश्नपत्र
1 प्र. - नीचे दिए गये चित्रों को पूरा करो
2 प्र. - फर्श को दी गई टाइल्स से भरो
3 प्र. - दी गई आकृतियों के क्षेत्रफल बताओ।
3 सेमी.
5 सेमी.
3 सेमी.
2 सेमी.
4 सेमी.
2 सेमी.
6 सेमी.
4. प्र. - 1 सेमी. वाले कितने वर्गों से यह आयत पूरी कर जायेगी

चित्र-2



चित्र-3 : पूर्व-परीक्षण (भाग-2)

दिन 2 : कार्ययोजना को संचालित करना

गतिविधि 1 : सममित रेखाएँ : इस वर्कशीट के साथ मैंने बच्चों को प्रासंगिक आकृतियों के पेपर कटआउट दिए। बच्चों ने आकृतियों के साथ काम किया, सममित रेखाओं की पहचान की और वर्कशीट को आसानी से पूरा किया। वे अन्य आकृतियों में भी सममित रेखा की पहचान कर पाए।

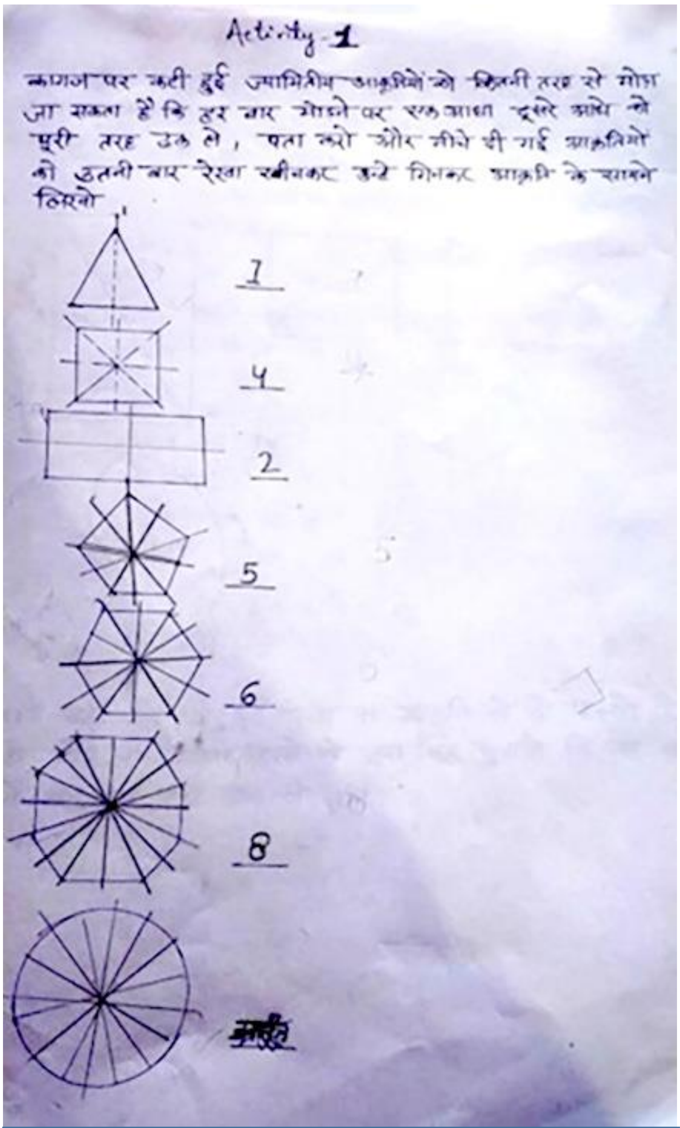


चित्र-4 : गतिविधि 1

गतिविधि 2 : घूर्णन सममिति : मैंने एक आकृति में इसे दर्शाया और बच्चों को यह समझ आ गई।

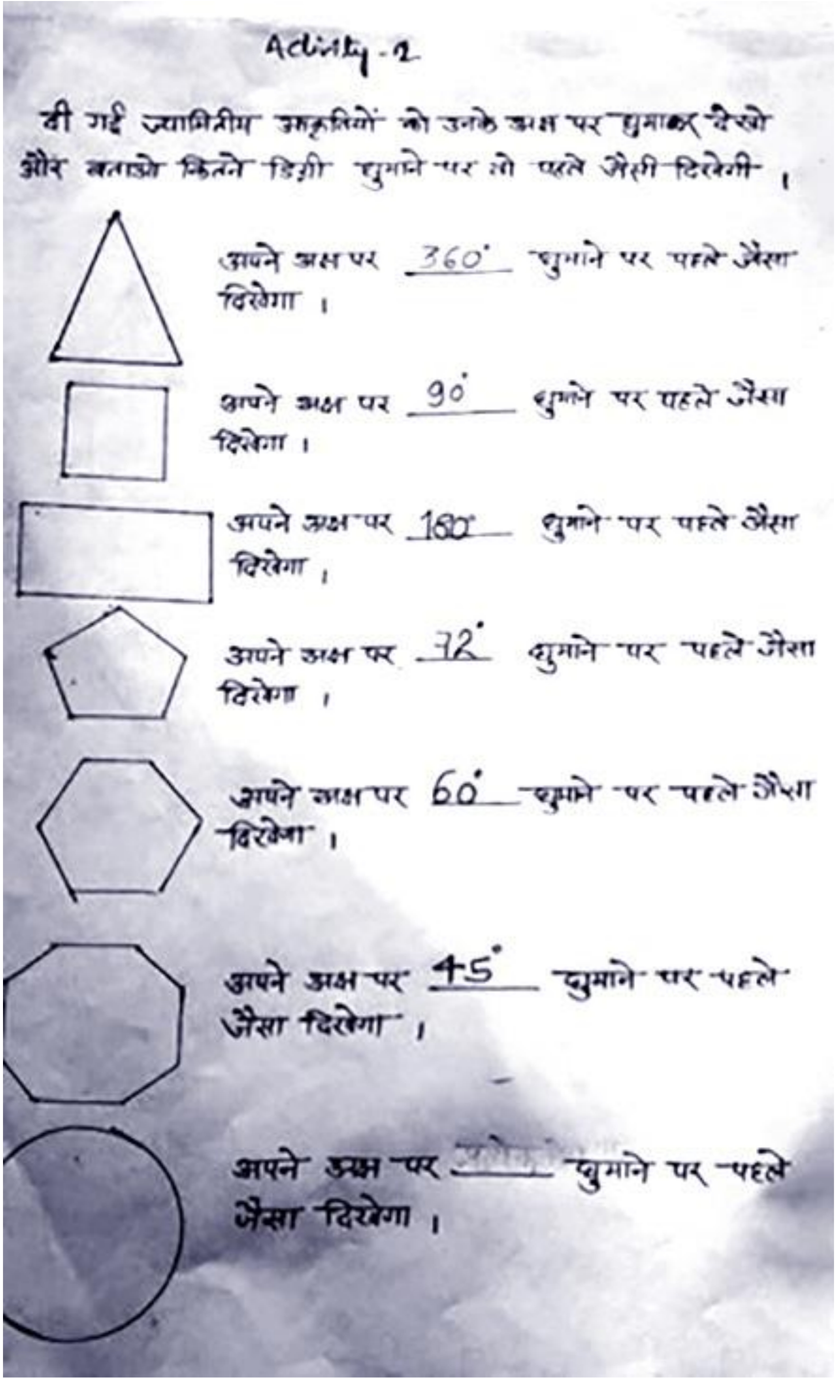


चित्र-5 : गतिविधि 2



दी गई आकृतियों को कितने तरीक़े से मोड़ा जा सकता है ताकि मुड़े हुए आधे भाग एक-दूसरे को पूरी तरह से ढँक लें। दी गई प्रत्येक आकृति के लिए इन मोड़-रेखाओं को खींचिए और इनकी संख्या आकृति के सामने लिखिए।

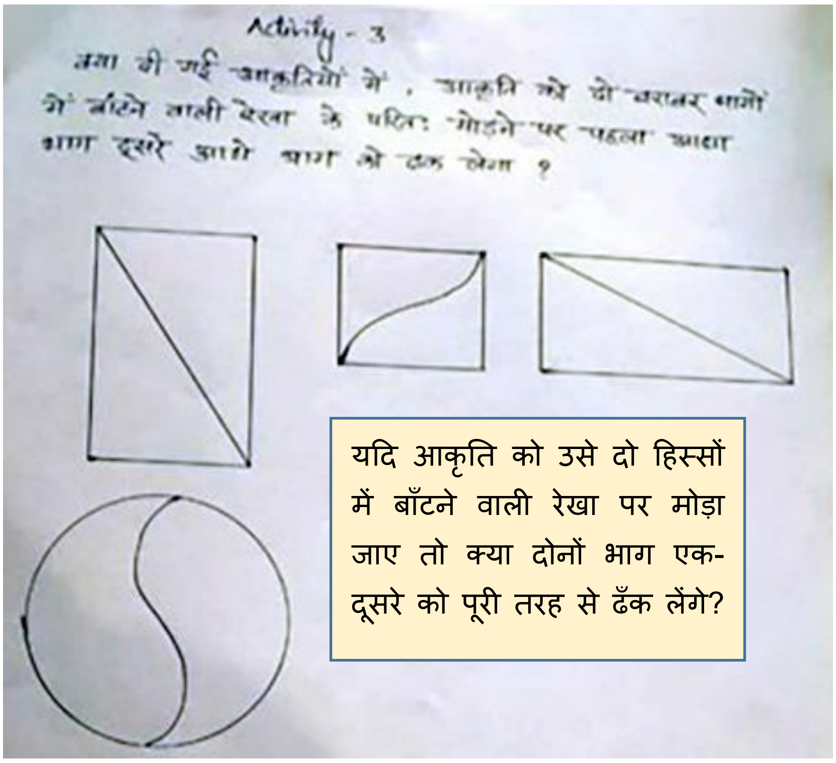
चित्र-6 : गतिविधि 1

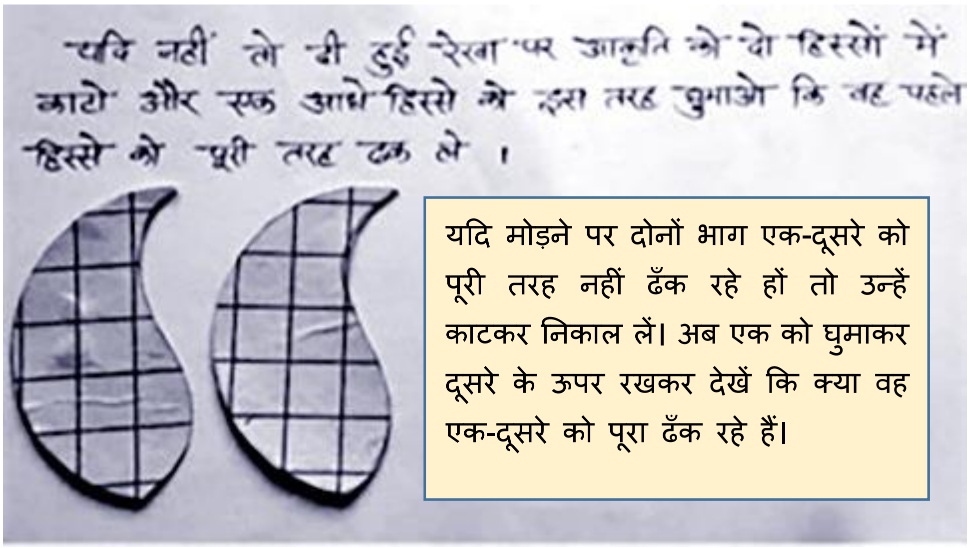


प्रत्येक आकृति को एक कोण पर इस तरह घुमाइए कि घुमाने के बाद की आकृति ऐसी लगे जैसे उसे घुमाया ही नहीं गया हो। प्रत्येक आकृति के बग़ल में दी गई ख़ाली जगह में कोण का माप लिखिए।

चित्र-7 : गतिविधि 2

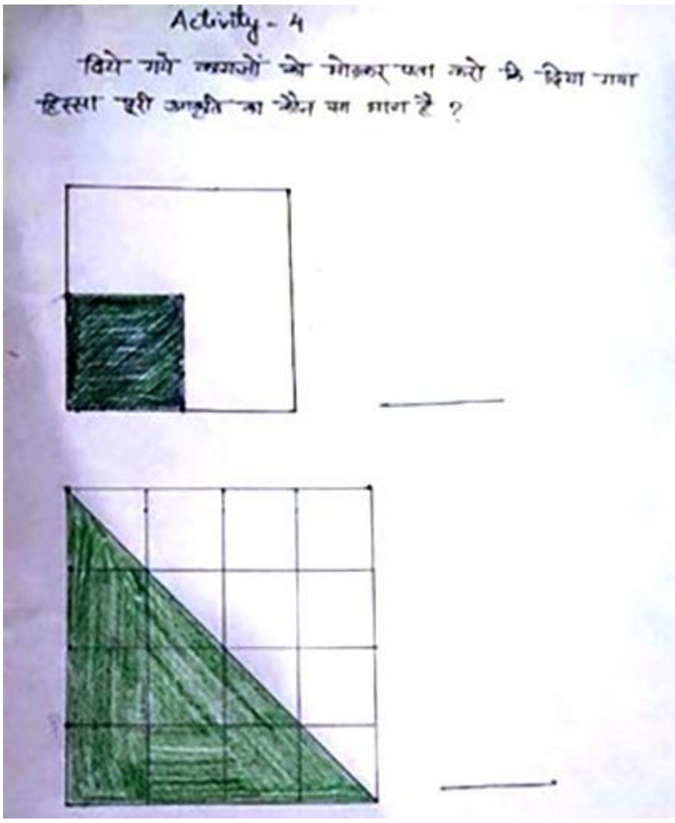
गतिविधि 3 : घूर्णन सममिति का उपयोग करके बाक़ी के आधे हिस्सों का पता लगाना : यह उन आकृतियों से सम्बद्ध है जिन्हें एक सीधी या वक्र रेखा द्वारा दो आधे हिस्सों में इस तरह बाँटा गया है कि उनमें घूर्णन सममिति (आधा मोड़) तो है, लेकिन रैखिक सममिति नहीं है। बच्चों को यह समझाना था कि दी गई किसी आकृति के दो हिस्से समान हैं या नहीं यह निर्धारित करने के लिए घूर्णन सममिति का उपयोग कैसे करें।



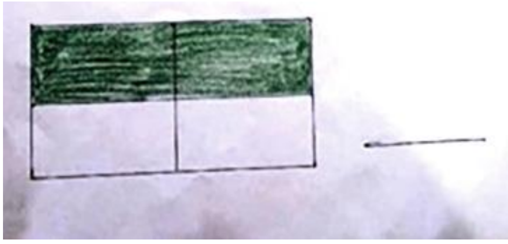


चित्र-8 : गतिविधि 3

गतिविधि 4 : बराबर भागों का पता लगाने के लिए मोड़ना : हो सकता है कि काग़ज़ मोड़ने के दौरान जब एक भाग को दूसरे पर रखा जाए तो बच्चे प्रत्यक्ष रूप से सममिति नहीं देख पाएँ। इस गतिविधि का उद्देश्य उन्हें यह समझाना था कि एक पूर्ण के कितने हिस्से को छायांकित किया गया था।



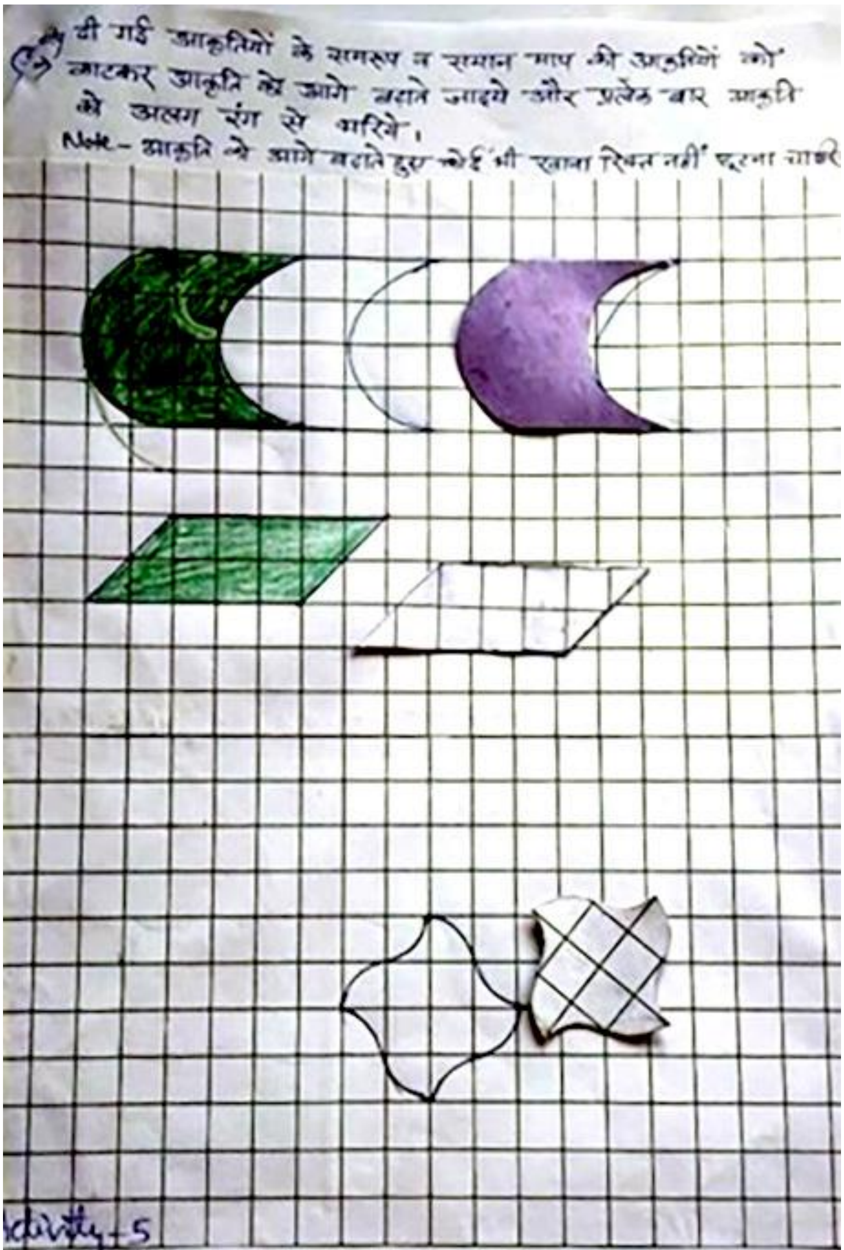
कागज़ मोड़कर पता करो कि हर आकृति का कितना हिस्सा छायांकित किया गया है।



चित्र-9 : गतिविधि 4

गतिविधि 5 : दी गई आकृति से टाइल करना : इस गतिविधि ने बच्चों को स्थानान्तरण सममिति को समझने का अवसर दिया जो ज़्यादातर टाइलिंग (फ़र्श पर आसानी-से देखने को मिल जाती है) और कपड़ों पर छापों के रूप में उपयोग की जाती है। बच्चों को वर्गांकित काग़ज़ पर आकृति की रूपरेखा बनाने और टाइलिंग करने के लिए एक स्टैंसिल दिया गया था।

अगले भाग में हम यह दिखाते हैं कि कैसे इस सममिति का उपयोग कुछ आकृतियों के क्षेत्रफलों को खोजने के लिए किया जा सकता है, जब हम दी गई आकृतियों को आगे बढ़ाते हैं, एक पैटर्न बनाते हैं और प्रत्येक भाग को एक अलग रंग से रंगते हैं।



दी गई आकृति को एक-दूसरे से सटाकार टाइल करें। सटी हुई आकृतियों को अलग रंग से रंगें।

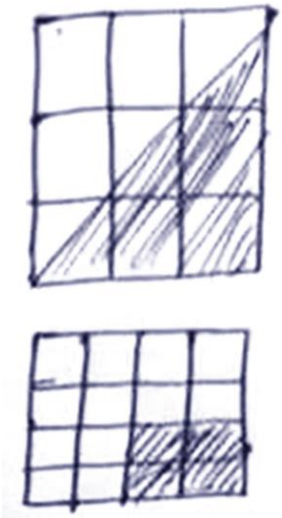
चित्र-10 : गतिविधि 5

क्षेत्रफल का पता लगाने के लिए सममिति का उपयोग करना :

तीन प्रकार की सममितियों का अनुभव करने के बाद हम अगले स्तर पर गए। अब बच्चों को यह समझाने का समय था कि इन गतिविधियों के माध्यम से मिला ज्ञान और समझ वर्गों या आयतों के अलावा अन्य आकृतियों के क्षेत्रफलों को खोजने में कैसे मदद कर सकती है।

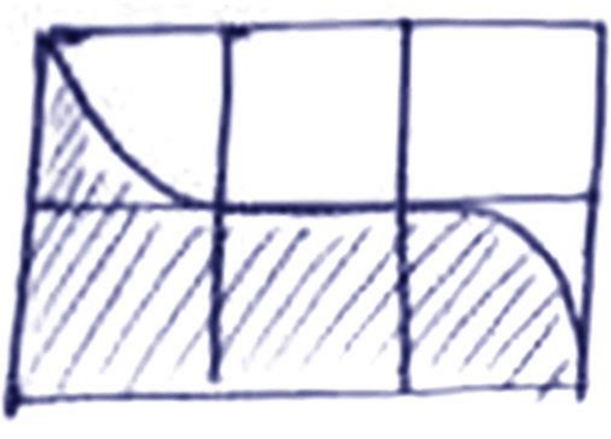
उदाहरण 1 में हमने सममित रेखा की पहचान की और उस रेखा के माध्यम से काग़ज़ को मोड़ने की कल्पना करके हमें दो आधे हिस्से या एक पूर्ण वर्ग (या आयत) मिला। अब बच्चों के लिए दिए गए वर्ग (या आयत) में इकाई वर्गों की संख्या की गणना करना और फिर अपेक्षित

हिस्से का क्षेत्रफल (**चित्र-11**) प्राप्त करने के लिए कुल इकाई वर्गों की संख्या का आधा या चौथाई करना आसान हो गया।



चित्र-11

उदाहरण 2 में हमने उन आकृतियों की सममिति का उपयोग किया जो वक्र रेखा से दो आधे हिस्सों में बँटी थीं। आकृतियों को काटने, घुमाने और एक आकृति को दूसरी आकृति के ऊपर रखने के अभ्यासों से बच्चों को यह समझ आ गया था कि वक्र रेखा आयत को दो हिस्सों में विभाजित करती है। इसलिए, उन्होंने आयत में इकाई वर्गों की संख्या की गणना की और अपेक्षित हिस्से का क्षेत्रफल (**चित्र-12**) प्राप्त करने के लिए उसे आधा कर दिया।



चित्र-12

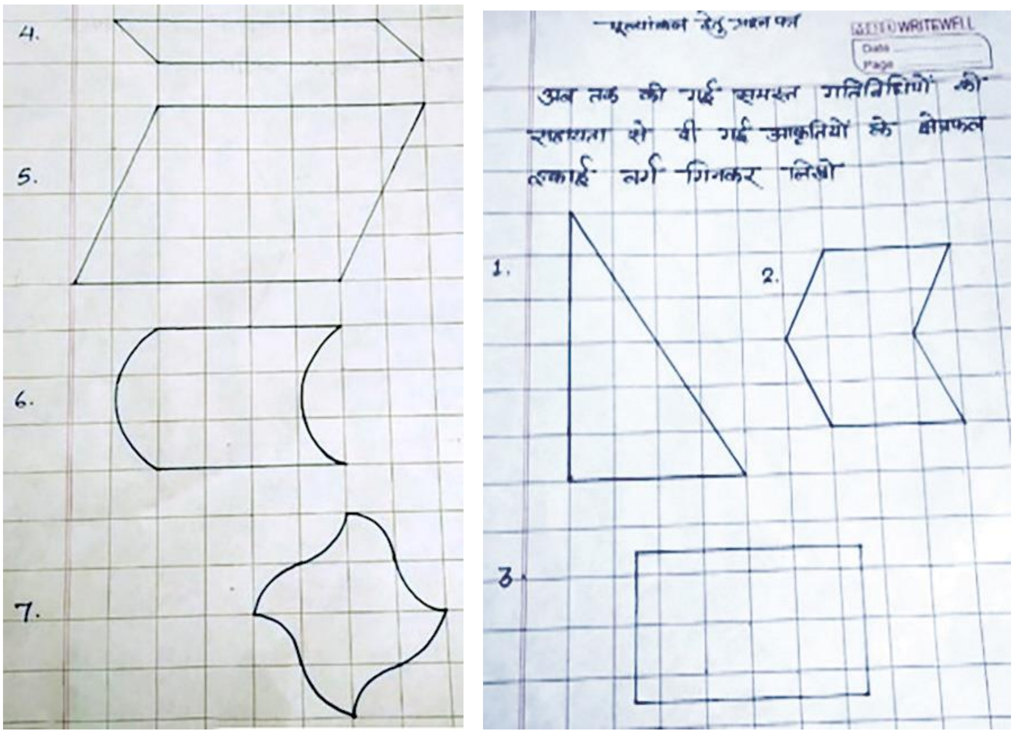
उदाहरण 3 में हम यह दिखाने के लिए गतिविधि 5 का उपयोग करते हैं कि दी गई आकृतियों को स्थानान्तरित करके कैसे हम एक पूर्ण वर्ग या आयत प्राप्त कर सकते हैं, जैसा कि **चित्र-13** में दिखाया गया है।



चित्र-13

मूल्यांकन

3-4 दिनों तक ऐसे उदाहरणों का अभ्यास करने के बाद अब मूल्यांकन का समय था। इस वर्कशीट में उन्हें केवल दी गई आकृतियों के क्षेत्रफलों का पता लगाने के लिए कहा गया था।



चित्र-14 : मूल्यांकन

जो निर्देश मैंने उन्हें दिए थे, वह यह थे कि वे वर्ग या आयत को पूरा करने या आकृतियों को मोड़ने या काटने और घुमाने की गतिविधियों का उपयोग कर सकते हैं, जैसे कि उन्होंने कक्षा में किया था। उन्हें वास्तव में इन गतिविधियों को करने की बजाय इनकी कल्पना करने का विकल्प भी दिया गया था। हालाँकि उन्हें केवल उत्तर बताने की बजाय अपनी तर्क प्रक्रिया (वह भी स्कैच के साथ) दिखानी थी। प्रत्येक सवाल के लिए 2 अंक थे : 1 सही उत्तर के लिए और 1 उनके द्‌वारा प्रयोग की गई प्रक्रिया की उपयोगिता के लिए।

हमने पाया

तीन बच्चे सममिति का उपयोग करके विभिन्न आकृतियों के क्षेत्रफल का पता लगाने में सक्षम थे। प्रश्न 1 के मूल्यांकन से यह स्पष्ट हो गया कि बच्चे एक पूर्ण वर्ग या आयत प्राप्त करने के लिए दूसरे आधे हिस्से को बनाने के विचार को समझ रहे थे। इसके अलावा वे यह भी

समझ गए थे कि केवल कर्ण (इसे हम AB कहते हैं); से आकृति को मोड़ने के कारण ऐसा नहीं हो रहा है। यहाँ घूर्णन की अवधारणा का उपयोग किया गया था और वे जानते थे कि रेखा AB पर से आकृति को 180 डिग्री घुमाने पर उन्हें आयत मिल रहा था। इसके अलावा वे जानते थे कि अपेक्षित आकृति के क्षेत्रफल को प्राप्त करने के लिए एक वर्ग या आयत बनाने की आवश्यकता है।

प्रश्न 6 में अपेक्षित आकृति के क्षेत्रफल को प्राप्त करने का एकमात्र तरीक़ा स्थानान्तरण की अवधारणा का उपयोग करना था। एक बच्चे को छोड़कर सभी इस प्रश्न का सही उत्तर प्राप्त करने में सक्षम थे।

शेष आकृतियों में, क्षेत्रफल का पता लगाने के लिए बच्चे वर्ग को पूरा करने, आयत और वर्ग बनाने की गतिविधि के साथ-साथ स्थानान्तरण सममिति का उपयोग करने में सक्षम थे।

निष्कर्ष

चूँकि यह पूरी अवधारणा और सवाल बच्चों के लिए बिल्कुल नए थे, इसलिए हम उनके पूर्व-परीक्षण ज्ञान और परीक्षण के बाद के परिणामों की तुलना मानक तरीक़ों द्वारा नहीं कर सकते।

मेरे अवलोकन :

1. बच्चे आकृतियों के साथ खेलने और सममिति से सम्बन्धित गतिविधियों को करने के लिए उत्साहित थे और दी गई वर्कशीट को आसानी से हल कर लेते थे।
2. उन्होंने तब इसे जटिल पाया जब उन्हें क्षेत्रफल को खोजने के लिए सममिति का उपयोग करना पड़ा।
3. मुझे ख़ुद भी इसे करने में कठिनाइयाँ हुईं और कुछ दिनों तक उनके साथ कई उदाहरणों का अभ्यास करना पड़ा।

अन्त में, यह बच्चों और शिक्षक दोनों के लिए एक बिल्कुल नए अनुभव के रूप में कुछ हद तक सन्तोषजनक था। बच्चे इस विचार को समझने और सममिति से सम्बन्धित किसी भी शब्दावली का उपयोग किए बिना सवाल को हल करने में सक्षम थे।

सीमाएँ

हमने बहुत विशिष्ट और सीमित संख्या में सवालों का चुना और बहुत कम आकृतियों के साथ इसे किया। इस मामले में बच्चों की समझ का पूरी तरह मूल्यांकन करने के लिए अधिक आकृतियों वाली और वर्कशीटों की आवश्यकता है।

प्रीति धस्माना उत्तराखण्ड के पौड़ी गढ़वाल में एक बेसिक स्कूल में सहायक शिक्षक हैं। उन्हें ग्रामीण पृष्ठभूमि के बच्चों के शिक्षण का 8 साल का अनुभव है। उन्होंने बीएड व डीएलएड के साथ राजनीति विज्ञान में एमए किया है। उनसे preetidhasmana884@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : निदेश सोनी **पुनरीक्षण एवं कॉपी-एडीटिंग** : कविता तिवारी **सम्पादन :** राजेश उत्साही